Q 61

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$$ est égale à :

A $\frac{1}{2e}$

B $\frac{1}{e}$

C 1

D e

E 2e

Corrigé: Q 61

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$ si on pose $f(x)=\sqrt{\ln(e+x)}$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$

On a $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

Et $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$

Alors $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{f'(0)}{g'(0)}$ Or $f'(x)=\frac{(\ln(e+x))'}{2\sqrt{\ln(e+x)}}=\frac{1}{2(e+x)\sqrt{\ln(e+x)}}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2e}$

Et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\Rightarrow g'(0)=\frac{1}{2}$ par suite : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{1}{e}$

La bonne réponse est B

Q 62

Si $f(x)=\frac{1}{1-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ alors $f'(x)$ est égale à:

A $\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x(1-x^2)}$

B $\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x^2)}$

C $\frac{1}{1-x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x(1-x^2)}$

D $\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x(1-x)}$

E $\frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{(1-x)^2}$

Corrigé: Q 62

On a $f(x) = \frac{1}{1-x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1-x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1-x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1-x}\times\frac{-1/x^2}{\frac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{1-x}\times\frac{-1}{x^2}\times\frac{x}{x+1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(1-x^2)}$$

La bonne réponse est B

Q 63

Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égal à:

A i

B -1

C 7-15i

D -i

E 7+15i

Corrigé: Q 63

$$\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{(7-15i)\times 1}{15+7i} = \frac{(7-15i)\times(-i^2)}{15+7i}$$

$$= -\frac{i(7-15i)\times i}{15+7i} = -i\cdot\frac{7i+15}{15+7i} = -i$$

Donc $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021} = (-i)^{2021} = -i^{2021}$

On sait que $i^4 = i^2.j^2 = 1$ et $2021 = 4\times 505 + 1$ donc $i^{2021} = i^{4\times 505+1} = (i^4)^{505}.i = i$

Par suite $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021} = -i$

La bonne réponse est D

Q 64

Si $x \in]0,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^n x^n)$ est égale à:

A $\frac{1}{x-1}$

B $\frac{1}{1-x}$

C 1

D $\frac{-1}{1+x}$

E $\frac{1}{1+x}$

Corrigé: Q 64

Si n est pair alors $n+1$ est impair, donc

$$1+x^{n+1}=1^{n+1}-(-x)^{n+1}=(1+x)(1-x+x^2-x^3+\cdots..+(-1)^n x^n)$$

Par suite $1-x+x^2-x^3+\cdots..+(-1)^n x^n=\frac{1+x^{n+1}}{1+x}$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots..+(-1)^n x^n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+x^{n+1}}{1+x}=\frac{1}{1+x}$ car $x \in]0,1[$

Si n est impair, on $1+x^n=(1+x)(1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1})$ donc $1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1+x^n}{1+x}$ par suite $1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n x^n=\frac{1+x^n}{1+x}+(-1)^n x^n$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^n x^n)=\frac{1}{1+x}+\lim_{n\to+\infty}-x^n=\frac{1}{1+x}$

En conclusion , $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n\to+\infty}(1-x+x^2-x^3+\cdots\ldots+(-1)^n x^n)=\frac{1}{1+x}$

La bonne réponse est E

Q 65

Dans $\mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $x^5+x-1=0$ est :

A 0

B 1

C 2

D 3

E 5

Corrigé: Q 65

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x - 1$, on a $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$
donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par suite le tableau de variations de f est comme suite :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

D'après le tableau de variation le nombre de solution de $f(x) = 0$ est 1.

La bonne réponse est B

Q 66

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z|\bar{z} = 15 - 20i$ alors $|(1+i)z|$ est égal à:

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{2}$

C $3\sqrt{2}$

D $4\sqrt{2}$

E $5\sqrt{2}$

Corrigé: Q 66

On a $|(1+i)z| = |1+i||z| = |z| \cdot \sqrt{2}$ or $|z| \cdot \bar{z} = 15 - 20i$

Donc $||z|\bar{z}| = |z||\bar{z}| = |15 - 20i|$ puisque $|z| = |\bar{z}|$

Alors $|z|^2 = |15 - 20i| = \sqrt{15^2 + 20^2}$

$|z|^2 = \sqrt{5^2 \times 3^2 + 5^2 \times 4^2} = \sqrt{5^2 \times (3^2 + 4^2)} = \sqrt{5^2 \times 25} = 25$

Par suite $|z| = 5$ donc $|(1+i)z| = 5\sqrt{2}$

La bonne réponse est E

Q 67

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$ alors:

A $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

B $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

C $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$

D $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

E La fonction f n'admet pasd limite en 0

Corrigé: Q 67

On a $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$ et $D_f = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}$$

On distingue deux ces $x > 0$ et $x < 0$, donc on calcul les limits à droite et à gauche de 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{\sqrt{x^2}} \left(\text{car } \sqrt{x^2} = |x| = x\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$$
$$= 1 \left(\text{car } \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{-\sqrt{x^2}} \left(\text{car } \sqrt{x^2} = |x| = -x\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}$$
$$= -1$$

Alors la fonction f n'admet pas de limite en 0

La bonne réponse est E

Q 68

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N} u_{n+1} = u_n^2 + u_n$. La limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ si elle existe, est égale à :

A 1

B $+\infty$

C 0

D -1

E Autre valeur

Corrigé: Q 68

On a $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, la limite I de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, si elle existe, vérifie $I = I^2 + I$ donc $I^2 = 0$ par suite $I = 0$.

La bonne réponse est C

Q 69

L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx$ est égale à:

A $\sqrt{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

B $\ln\sqrt{1+e}$

C $\ln(1+e)$

D $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$

E $\sqrt{\ln(1+e)}$

Corrigé: Q 69

$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx$, on utilise le changement de variation et on pose $u = x^2$ alors pour $x = 0$, on a

$u = 0$ est pour $x = 1$ on a $u = 1$ et $du = 2x.dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+e^{-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{1+e^{-u}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^u}{e^u(1+e^{-u})}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^u}{e^u+1}\,du$$
$$= \frac{1}{2}[\ln(e^u+1)]_0^1 = \frac{1}{2}(\ln(e+1) - \ln(2))$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln\left[\left(\frac{1+e}{2}\right)^{1/2}\right] = \ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$$

La bonne réponse est C

Q 70

Si $f(1) = 4$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f'(x) = 2x + \ln x$ alors $f(e)$ est égale à:

A e^2

B $e + 4$

C $e^2 + 4$

D e

E 4

Corrigé: Q 70

On a $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*), f'(x) = 2x + \ln\, x$, donc f est la primitive de f' qui vérifie $f(1) = 4$.

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (2x + \ln\, x)dx = \int 2xdx + \int \ln\, xdxf(x) = x^2 + \int \ln\, xdx.$

Si on utilise une intégration par partie pour calculer $\int \ln\, x.dx$ on trouve

$$f(x) = x^2 + x(\ln\,(x) - 1) + \text{ Ste}$$

Puisque $f(1) = 4 = \text{Cte}$ alors

$$f(x) = x^2 + x(\ln\,(x) - 1) + 4$$

Par suite $f(e) = e^2 + 4$

La bonne réponse est C

Q 71

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $z = 1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)$ alors :

A $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg\, z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

B $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg\, z \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

C $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg\, z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

D $|z| = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg\, z \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

E $|z| = 2\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg\, z \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Corrigé: Q 71

On a Z = $1 + i(1 + \sqrt{2})$

Donc $|Z| = \sqrt{1^2 + (1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

Alors $|Z| = \sqrt{(2\sqrt{2})\left(\frac{4}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+1/\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos\,(\pi/4)}{2}}$

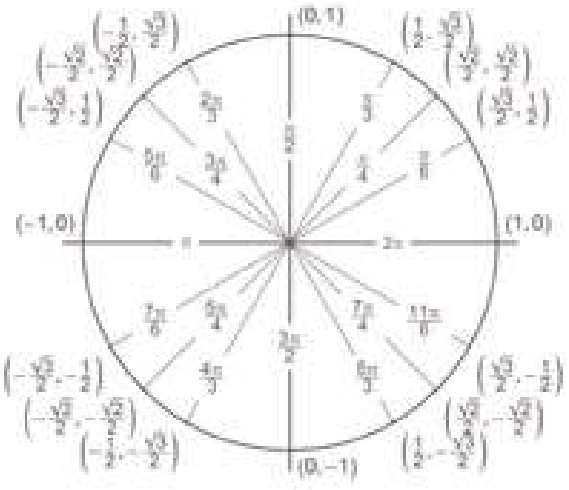
$$= 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = 2\sqrt{2}\cdot\cos\,(\pi/4)$$

Parmi les choix disponibles pour $\theta = \arg z$ on a $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$.

On remarque que $\cos\,(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ et $\sin\,(\theta) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

Donc $\cos\,(\theta) < \sin\,(\theta)$ par suite $\theta = \frac{3\pi}{8}$,

$\left(\text{Car } \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \text{ tandis que } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} > \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$



La bonne réponse est A

Q 72

Si $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ et $f'(2) - f'(1) = 2$ alors $f'(2) + f'(1)$ est égal à:

A 4

B 6

C 8

D 10

E 12

Corrigé: Q 72

On a $\int_1^2 f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx = 8$

$$\int_1^2 f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2 \cdot (f'(x))' \cdot f''(x) \cdot dx = \frac{1}{2}[(f'(x))^2]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}[(f'(2))^2 - (f'(1))^2] = \frac{1}{2}(f'(2) - f'(1))(f'(2) + f'(1))$$

Puisque $f'(2) - f'(1) = 2$ alors $f'(2) + f'(1) = 8$

La bonne réponse est C

Q 73

Soit $q \in \mathbb{R}$.Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} q^k$

Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ alors q est égal à :

A $\frac{2}{3}$

B $\frac{3}{4}$

C $\frac{4}{5}$

D $\frac{5}{6}$

E $\frac{6}{7}$

Corrigé: Q 73

Q73: On a $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$ on a $1 - q^{n+1} = (1-q)(1+q+q^2+\cdots\ldots+q^n)$

$= (1-q)(1+S_n).$

Donc $1 + S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ alors $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$ si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} S_n = 4$ on aura obligatoirement $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q} - 1 = 4$ donc $\frac{1}{1-q} = 5$ alors $1 - q = \frac{1}{5}$

Donc $q = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

La bonne réponse est C

Q 74

L'intégration $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égale à:

A $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{6}$

D $\frac{\pi}{8}$

E $\frac{\pi}{12}$

Corrigé: Q 74

$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x}{\sin x+\cos x} dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x+\sin x-\cos}{\sin x+\cos x} dx$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x} \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} \cdot dx\right] = \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x} \cdot dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x} dx\right] = \frac{1}{2}\left([x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - [\ln(\sin x + \cos x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \left(\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\right)\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

La bonne réponse est E

Q 75

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, si $|z_1| = |z_2| = 1$ et $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ alors $|z_1 - z_2|$ est égal à:

A 1

B 3

C $\sqrt{3}$

D 2

E $\sqrt{2}$

Corrigé: Q 75

On a :

$$\begin{aligned}|Z_1 - Z_2|^2 &= (Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1} - Z_2)\\ &= (Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1} - \overline{Z_2})\\ &= Z_1\overline{Z_1} - Z_1\overline{Z_2} - Z_2\overline{Z_1} + Z_2\overline{Z_2}\\ &= (Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1} - Z_2)\\ &= (Z_1 - Z_2)(\overline{Z_1} - \overline{Z_2})\\ &= Z_1\overline{Z_1} - Z_1\overline{Z_2} - Z_2\overline{Z_1} + Z_2\overline{Z_2}\end{aligned}$$

Puisque $|Z_1| = 1$ alors $|Z_1|^2 = Z_1\overline{Z_1} = 1$ de même $|Z_2| = 1$ alors $|Z_2|^2 = Z_2\overline{Z_2} = 1$ par suite : $|Z_1 - Z_2|^2 = 2 - (Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1})(\star)$ d'autre part on a: $|Z_1 + Z_2| = \sqrt{3}$ alors $(Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \overline{Z_2}) = Z_1\overline{Z_1} + Z_1(k_2 + Z_2\overline{Z_1} + Z_2\overline{Z_2} = 3$ par suite : $Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} + 2 = 3$ donc $Z_1\overline{Z_2} + Z_2\overline{Z_1} = 1$ d'aprés la relation $(\star)$ on obtient $|Z_1 - Z_2|^2 = 1$ donc $|Z_1 - Z_2| = 1$

La bonne réponse est A

Q 76

$(u_n)_{\substack{n\geq 0\\ n\to+\infty}} u_n$ est la suite définie par: $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à:

A 0

B $+\infty$

C 1

D $\sqrt{2}$

E $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigé: Q 76

On a $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_n = \sqrt{\frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}}$ donc $u_n^2 = \frac{u_{n+1}^2 + u_{n-1}^2}{2}$ alors $u_{n+1}^2 = 2u_n^2 - u_{n-1}^2$

Si on pose $v_n = u_n^2$ on remarque que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = 2u_n^2 - u_{n-1}^2 - u_n^2 = u_n^2 - u_{n-1}^2$

Par suite $v_{n+1} - v_n = v_n - v_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2} = \cdots .. = v_1 - v_0$ et puisque $v_1 = u_1^2 = 1$ et $v_0 = u_0^2 = 0$

On obtient $v_{n+1} - v_n = 1$ donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 0$ et de raison $r = 1$ donc

$v_n = v_0 + n.r = n$ et par suite $u_n^2 = n$ et puisque $u_n \geqslant 0$ alors $u_n = \sqrt{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On peut remarquer aussi que (u_n) est une suite croissante et puisque $u_2 = \sqrt{2}$ et $u_3 = \sqrt{3}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant \sqrt{3}$ par suite parmi les choix possibles reste $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

La bonne réponse est B

Q 77

Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, \text{ si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x+1}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si :

A $a = 1$ et $b = 1$

B $a = -1$ et $b = 1$

C $a = 2$ et $b = 1$

D $a = -1$ et $b = -1$

E $a = -1$ et $b = 0$

Corrigé: Q 77

On $a(a, b) \in \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{cases} ax + b \leq 0 \\ \frac{1}{x+1}, x > 0 \end{cases}$

Puisque f est dérivable en 0 alors f est continue en 0

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} ax + b = b = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x+1} = 1 = f(0)$ donc $b = 1$

f est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ par suite $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{ax + b - b}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x+1} - 1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{ax}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-1}{x+1}$

Donc $a = -1$ par suite $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

La bonne réponse est B

Q 78

Soient $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ Si $\int_{-1}^{1} f(x)dx < 2$ alors le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ del'équation $f(x) = 0$ est:

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

Corrigé: Q 78

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ on a

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + 2ax + b)dx = [x^3 + ax^2 + bx]_{-1}^{1}$ donc $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 + 2b < 2$ d'oú $b < 0$ le descriminant Δ' de l'équation $f(x) = 0$ est $\Delta' = a^2 - 3b > 0$,

Alors les nombre de solutions de l'équations $f(x) = 0$ est 2

La bonne réponse est C

Q 79

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ et $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ Soient z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation d'inconnue z
(E) : $z^2 - \sin(2\alpha)z + \sin^2(\alpha) = 0$
La valeur de α pour laquelle les points $O, M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont les sommets d'un triangle équilatéral est:

A $\frac{\pi}{3}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{5}$

D $\frac{\pi}{6}$

E $\frac{\pi}{8}$

Corrigé: Q 79

On a (E): $Z^2 - \sin(2\alpha)Z + \sin^2(\alpha) = 0$
$\Delta = (\sin(2\alpha))^2 - 4\sin^2(\alpha) - (2\sin(\alpha)\cos(\alpha))^2 - 4\sin^2(\alpha)$
$= 4\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha) - 4\sin^2(\alpha) = 4\sin^2(\alpha)(\cos^2(\alpha) - 1)$
qquad $= -4\sin^2 \alpha \cdot \sin^{-2} \alpha = -4\sin^4(\alpha) = (2i\sin^2(\alpha))^2$
Donc les solutions Z_1 et Z_2 sont :

La bonne réponse est D

$Z_1 = \dfrac{\sin(2\alpha) + 2i\sin^2(\alpha)}{2} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2i\sin^2\alpha}{2}$

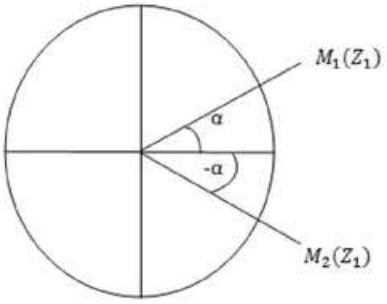
$Z_1 = \sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ donc $|Z_1| = \sin\alpha > 0$ et $\arg(Z_1) = \alpha$

$Z_2 = \dfrac{\sin(2\alpha) - 2i\sin^2(\alpha)}{2} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha - 2i\sin^2(\alpha)}{2}$

$= \sin\alpha(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \sin(\alpha)(\cos(-\alpha) + i\sin(\alpha))$

Alors $|Z_2| = \sin(\alpha)$ et $\arg(Z_2) = -\alpha$

Le triangle OM_1M_2 est équilatéral si on a $2\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ donc $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$



Q 80

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel x on pose: $f_n(x) = e^{-x} - nx$ On a:

A $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]0;1[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$

B $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]0;1[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$

C $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]0;1[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = e$

D $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]-1;0[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$

E $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]-1;0[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$

Corrigé: Q 80

On a $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-x} - nx$

Les fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - nx = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} - nx = -\infty$

De plus $f_n'(x) = (e^{-x} - nx)' = -e^{-x} - n = -(e^{-x} + n) \leqslant 0$ donc f_n est décroissante et on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

L'équation $f_n(x) = 0$ admet alors une solution unique dans $\mathbb{R}$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists!\, a_n \in \mathbb{R}; f_n(a_n) = 0$.

De plus on remarque que $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = e^{-1} - n < 0$ (car $e^{-1} < 1 \leqslant n$) d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires, $a_n \in]0,1[$ donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]0,1[): f_n(a_n) = 0$.

On remarque que d'aprés les choix disponibles on a $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$ on $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$ on $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = e$

puisque $f_n(a_n) = e^{-a_n} - na_n = 0$ alors $na_n = e^{-a_n}$ et par suite $\lim_{n\to+\infty} na_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-a_n}$. Pour avoir

$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-a_n}$ on doit avoir on dend vers $+\infty$ ce qui est impossible car $a_n \in]0,1[$

De même pour avoir $\lim_{n\to+\infty} na_n = e = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-a_n}$, on doit avoir $a_n \to -1$, ce qui est impossible aussi car

$0 < a_n < 1$ et par suite $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant 1$ reste donc ce choix de $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$ donc la réponse juste est

A: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\exists!\, a_n \in]0;1[): f_n(a_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$

La bonne réponse est A